

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته		نام و نام خانوادگی :		ساعت شروع : ۸ صبح		رشته : ریاضی فیزیک	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تعداد صفحه: ۲		تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>			
ردیف		سوالات پاسخ نامه دارد					
		نمره					

### الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقی مانده تقسیم عدد $a$ بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $9k + 7$ و $n   9k + 6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$ .	۱
۴	باقی مانده تقسیم $7^{30}$ بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله هم نهشتی $2x \equiv 5$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه های رأس های هر گراف ..... تعداد یال ها است. ب) در یک گراف $k$ - منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با ..... است. پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف $G$ ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر ..... گراف $G$ می نامیم. ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر ..... می نامیم.	۱
۷	گراف $G$ را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از $a$ به $c$ بنویسید.	۱/۲۵
۸	در گراف $G$ ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف $G$ را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵

« بقیه سوالات در صفحه دوم »

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

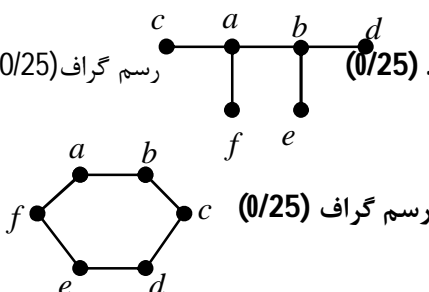
۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱،۲،۳،۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱																
	<table><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table>	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	
۳	۴	۱	۲															
۱	۲	۳	۴															
۲	۱	۴	۳															
۴	۳	۲	۱															

۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱																		
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> <p>(الف)</p> <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <div> <p>(ب)</p> <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> </div> </div>	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		

### بخش انتخابی

دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱۵	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .	۱
۱۶	گراف $G$ ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. (الف) اندازه گراف $G$ را بیابید. (ب) نمودار گراف $G$ را رسم کنید.	۱
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۸	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. (ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).	۱
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند $n$ ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۱
۲۱	در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱
۲۲	قرار است سه کارگر $W_1, W_2, W_3$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱
	"موفق باشید"	جمع نمره
		۲۴

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: 8 صبح		مدت امتحان: 120 دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: 1399/04/08			
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال 1399				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>			
ردیف	راهنمای تصحیح						
پاسخ سوالات الزامی							
1	<p>الف) نادرست (0/25) <math>\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C</math> (0/25) , <math>\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C</math> (0/25) (مشابه قسمت ت کار در کلاس صفحه 3)</p> <p>ب) درست (0/25) <math>(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(0/25)} - 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(0/25)} = 8q</math> (مسأله 3 صفحه 15)</p>						
2	<p>(0/25) <math>a = 4q + 3</math> (0/25) <math>\Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(0/25)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(0/25)} = 8q' + 1</math> (0/25) <math>\Rightarrow r = 1</math> (0/25) (مشابه مثال صفحه 14)</p>						
3	<p><math>n   9k + 7 \times (-7)</math> (0/25) <math>\Rightarrow n   -63k - 49 + 63k + 54</math> (0/25) <math>\Rightarrow n   5</math> (0/25) <math>\xrightarrow{n \in N} n = 1</math> یا 5 (0/25) (مثال صفحه 12)</p>						
4	<p><math>7^2 = 49 \equiv 4</math> (0/25) <math>\Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1</math> (0/5) <math>\Rightarrow 7^{28} \equiv 1</math> (0/25) <math>\xrightarrow{\times 7^2 \equiv 4 (0/25)} 7^{30} \equiv 4</math> (0/25) (مشابه سوال 8 و 9 صفحه 29)</p>						
5	<p>(0/25) <math>2 \equiv 35</math> (0/25) <math>\Rightarrow 5x \equiv 35</math> (0/25) <math>\xrightarrow{(5,11)=1 (0/25)} x \equiv 7</math> (0/25) <math>\Rightarrow x = 11k + 7</math> (0/25) (مشابه سوال 14 صفحه 30)</p>						
6	<p>الف) دو برابر (0/25) (نتیجه ابتدای صفحه 40)</p> <p>ب) <math>k</math> (0/25) (تعریف گراف منتظم صفحه 35)</p> <p>پ) مینیمم (0/25) (تعریف صفحه 44)</p> <p>ت) مینیمال (0/25) (تعریف صفحه 46)</p>						
7	<p>الف) (0/5) <math>N_G[a] = \{a, b, e, d\}</math> (مشابه مثال صفحه 36)</p> <p>ب) دور به طول 4 <math>a, b, e, d, a</math> (0/25) (تعریف دور صفحه 38) (در قسمت ب اگر دور را به صورت <math>a, d, e, b, a</math> نوشت، نمره داده شود).</p> <p>پ) مسیر به طول 3، <math>a, e, b, c</math> (0/25) و مسیر به طول 4، <math>a, d, e, b, c</math> (0/25) (مشابه مثال صفحه 38)</p>						
8	<p>(0/25) <math>\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1</math> (0/25) <math>\Rightarrow 9 + 12 = p - 1</math> (0/25) <math>\Rightarrow p = 22</math> (0/25) (مسأله 1 صفحه 38)</p>						
9	<p>الف) گراف روبه‌رو از مرتبه 6 و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا <math>\{a, b\}</math> است. (0/25) (تمرین 9 صفحه 53)</p> <p>ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه 2 است که عبارتند از: <math>\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}</math>. (0/25) (ذکر یک مجموعه کافی است.)</p> <p>رسم گراف (0/25)</p> 						
10	<p>برای گراف مورد سوال داریم <math>\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)</math> (0/5). از طرفی مجموعه <math>\{g, h, d\}</math> یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است (0/25). لذا <math>\gamma(G) \leq 3</math> (0/25). بنابراین <math>\gamma(G) = 3</math> (0/25). (قسمت دوم کار در کلاس صفحه 50)</p>						
11	<p><math>\frac{7!}{2! \times 3!}</math> (0/5) <math>= 42</math> (0/25) (مشابه مثال پایین صفحه 58)</p>						
12	<p>(قسمت پ تمرین 8 صفحه 71)</p> <p><math>x_1 + \dots + x_5 = 11</math> , <math>x_2 \geq 2</math> , <math>x_5 \geq 4</math> (0/25)</p> <p><math>x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11</math> (0/25) <math>\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5</math> (0/25) <math>\Rightarrow</math> جواب <math>= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}</math> (0/5)</p>						
ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم							

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: 8 صبح	مدت امتحان: 120 دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: 1399/04/08	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال 1399		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	راهنمای تصحیح		نمره																		
13	<p>با استفاده از جایگشت <math>1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1</math> (0/5) مربع لاتین به صورت مقابل داریم.</p> <p>(مشابه تمرین 12 صفحه 72)</p> <p>(0/5)</p> <table><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr></table> <p>(برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.)</p>		3	2	1	4	1	4	3	2	4	1	2	3	2	3	4	1	1		
3	2	1	4																		
1	4	3	2																		
4	1	2	3																		
2	3	4	1																		
14	<p>(الف)</p> <table><tr><td>32</td><td>21</td><td>13</td></tr><tr><td>11</td><td>33</td><td>22</td></tr><tr><td>23</td><td>12</td><td>31</td></tr></table> <p>(0/25)</p> <p>متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. (0/25)</p> <p>(ب)</p> <table><tr><td>13</td><td>21</td><td>32</td></tr><tr><td>32</td><td>13</td><td>21</td></tr><tr><td>21</td><td>32</td><td>13</td></tr></table> <p>(0/25)</p> <p>متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (0/25)</p> <p>(مثال صفحه 65)</p>		32	21	13	11	33	22	23	12	31	13	21	32	32	13	21	21	32	13	1
32	21	13																			
11	33	22																			
23	12	31																			
13	21	32																			
32	13	21																			
21	32	13																			

پاسخ سوالات اختیاری

15	چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است. (0/25) (قسمت الف تمرین 1 صفحه 8)	1 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \quad (0/25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad (0/25) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (0/25)$
16	(الف) $3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9 \quad (0/5)$ (ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (0/5)	1 (تعریف گراف k-منتظم صفحه 35)
17	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v) \quad (0/25)$ از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ زوج‌اند. (0/25) لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. (0/25) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (0/25) (صفحه 40)	1
18	(الف) $4! \times 3! \quad (0/5)$ (ب) $4! \times 4! \quad (0/5)$	1 (مشابه مثال صفحه 57)
19	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه 4 عضوی به مجموعه‌ای 8 عضوی (0/25)، یعنی: $(0/25) = 168 \circ \quad (0/5) = \frac{8!}{4!} \quad (0/5)$ . (مثال پایین صفحه 78)	1
20	(مشابه کار در کلاس صفحه 76) $A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 1 \circ \circ, n = 6k\} \Rightarrow  A  = \left\lfloor \frac{1 \circ \circ}{6} \right\rfloor = 16 \quad (0/25)$ $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 1 \circ \circ, n = 1 \circ k\} \Rightarrow  B  = \left\lfloor \frac{1 \circ \circ}{1 \circ} \right\rfloor = 1 \circ \quad (0/25)$ $A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 1 \circ \circ, n = 3 \circ k\} \Rightarrow  A \cap B  = \left\lfloor \frac{1 \circ \circ}{3 \circ} \right\rfloor = 3 \quad (0/25) \Rightarrow  A \cup B  = 16 + 1 \circ - 3 = 23 \quad (0/25)$	1

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: 8 صبح		مدت امتحان: 120 دقیقه																																																			
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان : 1399/04/08																																																					
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال 1399				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir																																																					
ردیف		راهنمای تصحیح						نمره																																																	
21		در این مسأله $k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$ و تعداد لانه ها 12 است (0/25). پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می‌بایست $6 \times 12 + 1 = 73$ باشد. (0/5)						1																																																	
22		برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع $A$ مربوط به ماشین‌ها و مربع $B$ مشخص کننده الیاف است. (سوال 14 صفحه 72)						1																																																	
		<div><div><table><tr><td></td><td><math>W_1</math></td><td><math>W_2</math></td><td><math>W_3</math></td></tr><tr><td>روز اول</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr></table><p>(0/25)</p></div><div><math>= A</math></div><div><table><tr><td></td><td><math>W_1</math></td><td><math>W_2</math></td><td><math>W_3</math></td></tr><tr><td>روز اول</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table><p>(0/5)</p></div><div><math>= B \Rightarrow</math></div><div><table><tr><td></td><td><math>W_1</math></td><td><math>W_2</math></td><td><math>W_3</math></td></tr><tr><td>روز اول</td><td>12</td><td>31</td><td>23</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>33</td><td>22</td><td>11</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>21</td><td>13</td><td>32</td></tr></table><p>(0/25)</p></div></div>							$W_1$	$W_2$	$W_3$	روز اول	1	3	2	روز دوم	3	2	1	روز سوم	2	1	3		$W_1$	$W_2$	$W_3$	روز اول	2	1	3	روز دوم	3	2	1	روز سوم	1	3	2		$W_1$	$W_2$	$W_3$	روز اول	12	31	23	روز دوم	33	22	11	روز سوم	21	13	32		
	$W_1$	$W_2$	$W_3$																																																						
روز اول	1	3	2																																																						
روز دوم	3	2	1																																																						
روز سوم	2	1	3																																																						
	$W_1$	$W_2$	$W_3$																																																						
روز اول	2	1	3																																																						
روز دوم	3	2	1																																																						
روز سوم	1	3	2																																																						
	$W_1$	$W_2$	$W_3$																																																						
روز اول	12	31	23																																																						
روز دوم	33	22	11																																																						
روز سوم	21	13	32																																																						
		عدد سمت چپ هر درآیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص کننده نوع الیاف است.																																																							
		جمع نمره						20																																																	

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»